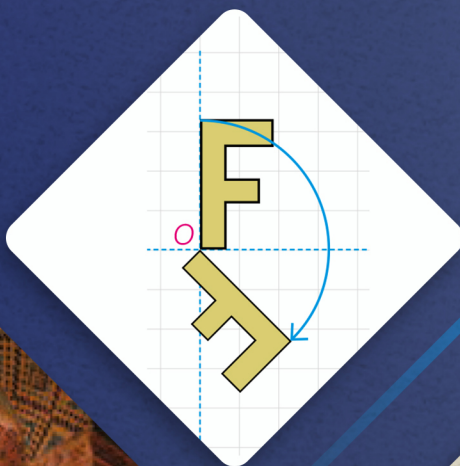


دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

هندسه ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

گروه ریاضی

مدیر پروژه: محمد امیررضا سید شاکری
معاون تولید محتوا: علی الفتی

حسابان و ریاضی پایه

مسئول درس: علیرضا فاطمی

حسین شفیع زاده

سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمد تقی پور

سعید اکبرزاده

امیدرضا پورحسینی

ریاضیات گسسته

مسئول درس: حسین اسدزاده

سعید اکبرزاده

امیررضا پورحسینی

ریاضی تجربی

مسئول درس: امیرحسین شریفیان

ایمان اردستانی

محمد خان گلدی

ریاضی انسانی

مسئول درس: حسین اسدزاده

سعید اکبرزاده

امیدرضا پورحسینی

طراحان

گروه علوم

مدیر پروژه: محمد حسین کشانی
معاون تولید محتوا: علی الفتی

زیست شناسی

مسئول درس: علی جوهری

منصوره رئیس دانا

علی جوهری

فیزیک

مسئول درس: علی کنی

احمد رضوانی

یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

بابک اسفندی

سبحان دقیق

زمین شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

حسن علی محمدی

مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: محمد حسین کشانی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

طراحان

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه
عمومی

ادبیات
فارسی

مسئول درس: محسن ابراهیم تهرانی

افشین محی الدین

دین و
زندگی

مسئول درس: زهرا محمدی

علی اکبر آخوندی

زهرا محمدی

زبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری

سعید ابراهیمی

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

گلاویژ جلالی

مهرابه مجتهد

جامعه
شناسی

مسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

فروغ تیموریان

آزیتا بیدقی

روان
شناسی

مسئولین درس: سیده ضحی سکاکی
و حسین اصفهانی

سیده ضحی سکاکی

زبان
عربی

مسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزه

عمار تاجبخش
جواهر فرحات

محسن احدی
کیارش پورمهدی

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسب

مهسا اصغری

وجیهه صادقی

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرز یحیی

مهسا اصغری

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری

فاطمه شریف زاده

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

گروه
انسانی

طراحان

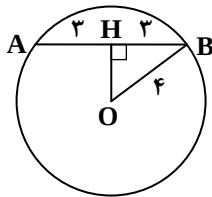


۱- (بارم کل: ۱/۵) (نمره)

(الف درست (۵/۰) نمره)

(ب) نادرست: می‌دانیم شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس طبق شکل زیر داریم: (۵/۰) (نمره)

$$OH^2 + BH^2 = OB^2 \Rightarrow OH^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow OH^2 + 9 = 16 \Rightarrow OH^2 = 7 \Rightarrow OH = \sqrt{7}$$



(ج) درست: طول خط‌المركزين از تفاضل شعاع‌های دو دایره کمتر است. (۵/۰) (نمره)

$$d = OO' = 4 < 7 - 2 \Rightarrow d < R' - R$$

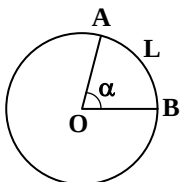
پس دو دایره متداخل هستند.

۲- (بارم کل: ۲) (نمره)

(الف (۸۰°) (۵/۰) نمره)

نکته: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از

دایره $C(O, R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ و مساحت قطاع برابر است با: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$



با توجه به نکته اگر زاویه مرکزی قطاع برابر α باشد، داریم:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{\pi \times 4^2 \times \alpha}{360^\circ} = \frac{32\pi}{9} \\ \Rightarrow \frac{16\alpha}{360^\circ} = \frac{32}{9} \Rightarrow \frac{\alpha}{40^\circ} = 2 \Rightarrow \alpha = 80^\circ$$

(ب) $4\sqrt{15}$ (۵/۰) (نمره)

نکته: در دو دایره مماس خارج، طول مماس مشترک خارجی از رابطه $TT' = 2\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید.

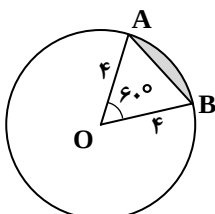
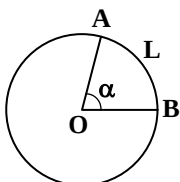
از نکته بالا استفاده کرده و داریم:

$$R = 6, R' = 10 \Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'} \\ = 2\sqrt{6 \times 10} = 2\sqrt{60} = 2\sqrt{4 \times 15} = 4\sqrt{15}$$

(ج) $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ (۵/۰) (نمره)

نکته: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از

دایره $C(O, R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ و مساحت قطاع برابر است با: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$



برای محاسبه مساحت قسمت هاشورزده، باید مساحت مثلث OAB را از مساحت قطاع AOB کم کنیم.

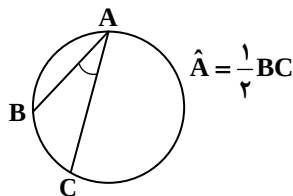
$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{قطاع } AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \times 4^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow S_{\text{هاشور}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

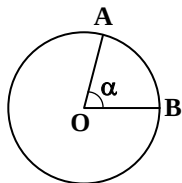


(د) ۴۰° (۵/۰ نمره)

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

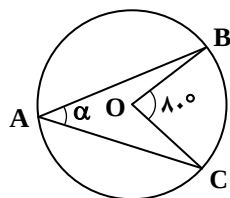


نکته: اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود و واحد آن درجه است.



$$AB = \hat{AOB} = \alpha$$

با استفاده از نکات بالا، داریم:



$$\hat{BOC} = BC \Rightarrow BC = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$

۳- (بارم کل: ۲ نمره)

با توجه به شکل، شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک را R' در نظر گرفته و داریم:

$$OO' = R - R' \Rightarrow R - R' = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{مساحت بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow \pi(R^2 - R'^2) = 16\pi \quad (\text{نمره } 0/5)$$

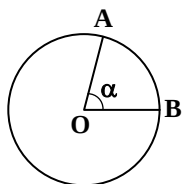
$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16 \Rightarrow 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R - R' = 2 \\ R + R' = 8 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/5) \Rightarrow \begin{cases} 2R = 10 \\ 2R' = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 5 \\ R' = 3 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{3}{5} = 0/6 \quad \text{یا} \quad \frac{R}{R'} = \frac{5}{3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

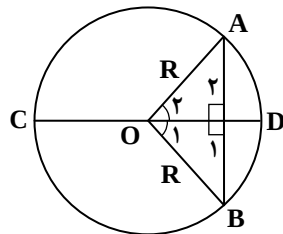
۴- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود و واحد آن درجه است.



$$AB = \hat{AOB} = \alpha$$

در شکل مقابل، طبق فرض، نقطه D وسط کمان AB است، پس داریم:



$$\left. \begin{aligned} AD = DB &\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OB &= R \\ OH = OH \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.}} \hat{OAH} \cong \hat{OBH} \quad (\text{نمره } 0/25) \quad (\text{نمره } 0/75)$$

حال از تساوی اجزای متناظر، داریم:

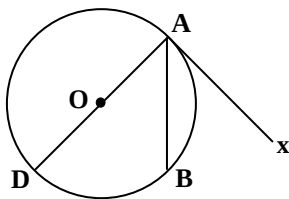
$$AH = HB \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AB \quad (\text{نمره } 0/25)$$



۵- (بارم کل: ۲ نمره)

راه حل اول:



در شکل مقابل، زاویهٔ ظلی $\widehat{xAB}$ را در نظر گرفته و قطر AD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است، پس:

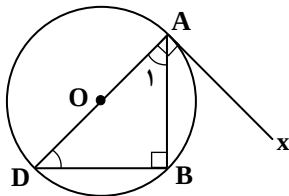
$$\left. \begin{aligned} \widehat{xAD} &= 90^\circ \quad (\text{نمره } 0/25) \\ AD \text{ قطر است} &\Rightarrow \widehat{ABD} = 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{xAD} = \frac{\widehat{ABD}}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

حال چون زاویهٔ $\widehat{xAD}$ برابر با مجموع زوایای $\widehat{DAB}$ و $\widehat{xAB}$ است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xAB} + \widehat{DAB} &= \frac{\widehat{ABD}}{2} \quad (\text{نمره } 0/25) \\ \widehat{DAB} &= \frac{\widehat{DB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{xAB} + \frac{\widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{ABD}}{2} \Rightarrow \widehat{xAB} = \frac{\widehat{ABD}}{2} - \frac{\widehat{DB}}{2} \Rightarrow \widehat{xAB} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{DB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\Rightarrow \widehat{xAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

راه حل دوم:



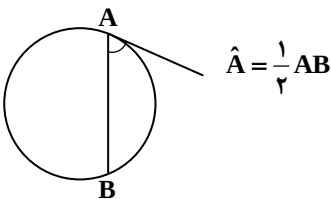
با توجه به شکل مقابل، قطر AD را رسم کرده و D را به B وصل می‌کنیم. زاویهٔ $\widehat{B}$ ، زاویهٔ محاطی روبه قطر است، پس قائم‌الزاویه است و در مثلث ABD ، داریم: (نمره ۰/۵)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{D} &= 90^\circ \quad (\text{نمره } 0/25) \\ \widehat{A}_1 + \widehat{xAB} &= 90^\circ \quad (\text{نمره } 0/25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{D} \quad (1) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\widehat{D} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \xrightarrow{(1)} \widehat{xAB} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

۶- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.



راه حل اول:

طبق شکل، از نقطهٔ A خطی موازی MB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند.

$$AE \parallel MB \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BCE} \quad (1) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، داریم:

$$AE \parallel MB, \text{ مورب } AM \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{M} \quad (2) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$\widehat{A}_1$ زاویهٔ ظلی است، پس:

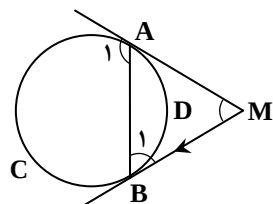
$$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2} \xrightarrow{(2)} \widehat{M} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{BCE}}{2} \xrightarrow{(1)} \widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

راه حل دوم:

از A به B وصل می‌کنیم زوایای $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ ظلی هستند و داریم:

$$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{ADB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$



$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{M} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{ADB}}{2} + \widehat{M}$$

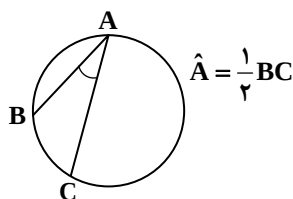
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

با توجه به اینکه زاویهٔ $\widehat{A}_1$ ، زاویهٔ خارجی در مثلث ABM است، داریم:

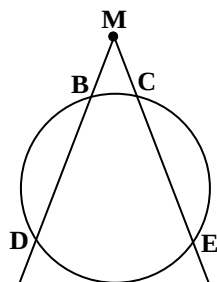


۷- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

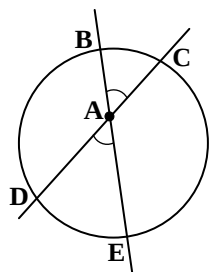


نکته: زاویه ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در خارج دایره تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:



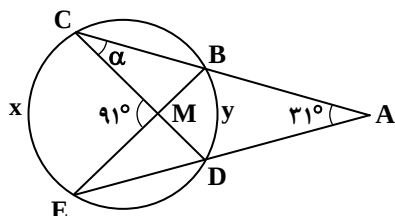
$$\hat{M} = \frac{1}{2} (DE - BC)$$

نکته: زاویه ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:



$$\hat{D\hat{A}E} = \hat{B\hat{A}C} = \frac{1}{2} (BC + DE)$$

در شکل مقابل، فرض می کنیم $BD = y$ و $CE = x$ ، با استفاده از نکات بالا، داریم:



$$\hat{A} = \frac{CE - BD}{2} \Rightarrow 31^\circ = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x - y = 62^\circ \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\hat{M} = \frac{CE + BD}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 182^\circ \quad (\text{نمره } 0/5)$$

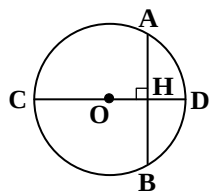
$$\begin{cases} x - y = 62^\circ \\ x + y = 182^\circ \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} y - x = -62^\circ \\ y + x = 182^\circ \end{cases} \Rightarrow 2y = 120^\circ \Rightarrow y = 60^\circ \quad (\text{نمره } 0/5)$$

با توجه به این زاویه C، محاطی است، داریم:

$$\hat{C} = \frac{1}{2} BD \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ \quad (\text{نمره } 0/5)$$

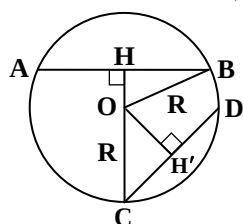
۸- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: اگر CD قطری از دایره باشد که بر وتر AB عمود است، آنگاه قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند.



$$CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ AD = BD \end{cases}$$

طبق شکل، مرکز دایره را به نقاط B و C وصل کرده و رابطه فیثاغورس را در دو مثلث OH'B و OH'C می نویسیم.



$$\triangle OH'B: OH'^2 + BH^2 = OB^2 \Rightarrow OH'^2 + BH^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH'^2 = R^2 - BH^2 \\ BH^2 = R^2 - OH'^2 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\triangle OH'C: OH'^2 + CH'^2 = OC^2 \Rightarrow OH'^2 + CH'^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH'^2 = R^2 - CH'^2 \\ CH'^2 = R^2 - OH'^2 \end{cases} \quad (2) \quad (\text{نمره } 0/5)$$



حال از فرض $AB > CD$ داریم:

$$AB > CD \Rightarrow \angle BH > \angle CH' \Rightarrow BH > CH' \Rightarrow BH^2 > CH'^2 \xrightarrow{(1),(2)} R^2 - OH^2 < R^2 - OH'^2$$

$$\Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH' \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

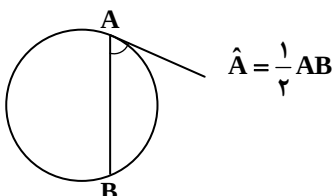
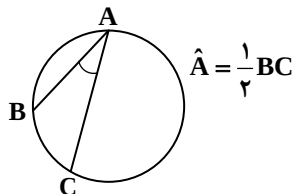
بار دیگر از فرض $OH < OH'$ داریم:

$$OH < OH' \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{(1),(2)} R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2 \Rightarrow -BH^2 < -CH'^2$$

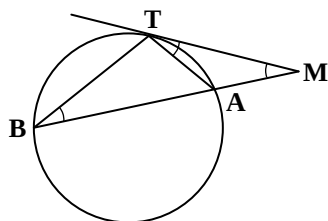
$$\Rightarrow BH^2 > CH'^2 \Rightarrow BH > CH' \Rightarrow \frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD \Rightarrow AB > CD \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

۹- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.



نکته: اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.



در شکل مقابل، MT در نقطه T بر دایره مماس است. مثلث‌های MAT و MBT متشابه هستند.

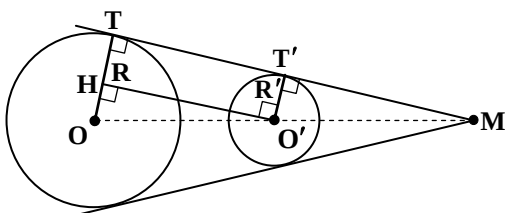
$$\left. \begin{array}{l} \hat{MTA} = \frac{1}{2}AT \text{ : زاویه ظلّی} \\ \hat{B} = \frac{1}{2}AT \text{ : زاویه محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{MTA} = \hat{B} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \text{ : مشترک} \\ \hat{MTA} = \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAT \sim \triangle MBT \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{MB} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

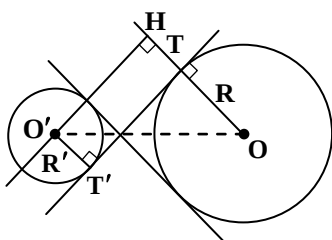
۱۰- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: در دو دایره متخارج، دو مماس مشترک خارجی و خط‌المركزین در یک نقطه هم‌رس هستند و اندازه مماس مشترک خارجی از رابطه زیر به‌دست می‌آید.



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

نکته: در دو دایره متخارج، دو مماس مشترک داخلی و خط‌المركزین در یک نقطه هم‌رس هستند و اندازه مماس مشترک داخلی از رابطه زیر به‌دست می‌آید.



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

با استفاده از فرمول‌های مماس مشترک‌ها داریم:

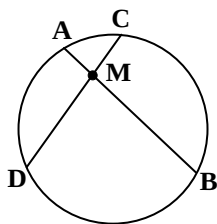
$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{35} = \sqrt{6^2 - (R - R')^2} \quad (\text{نمره } ۰/۵) \\ \sqrt{11} = \sqrt{6^2 - (R + R')^2} \quad (\text{نمره } ۰/۵) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 35 = 36 - (R - R')^2 \\ 11 = 36 - (R + R')^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (R - R')^2 = 1 \\ (R + R')^2 = 25 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R - R' = 1 \\ R + R' = 5 \end{array} \right. \quad (\text{نمره } ۰/۵) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = 3 \\ R' = 2 \end{array} \right. \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

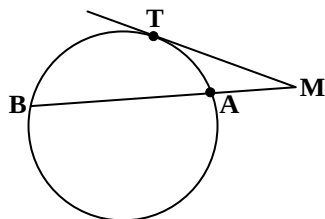


۱۱- (بارم کل: ۱/۵ نمره)

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آنگاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



نکته: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع



$$MT^2 = MA \cdot MB$$

با استفاده از روابط طولی در دایره، داریم:

$$MD \times MF = MC \times MB \Rightarrow \underbrace{3 \times 4 = x \times 6}_{(نمره ۰/۵)} \Rightarrow x = 2 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$AE^2 = AB \times AC \Rightarrow y^2 = 4(4 + 6 + x) \Rightarrow \underbrace{y^2 = 4 \times 12 = 48}_{(نمره ۰/۵)} \Rightarrow y = \sqrt{48} \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \quad (نمره ۰/۲۵)$$